상위권 수학 랑데뷰 세미나(2)

준선 및 준원의 성질

이차곡선 밖의 점에서 이차곡선에 그은 두 접선이 항상 직교하도록 하는 점들의 자취를 준선 및 준원이라 한다.

⇨ 포물선만 준선을 갖고, 나머지는 준원을 갖는다.

원	$x^2+y^2=r^2$	⇨ 준원	$x^2+y^2=2r^2$
포물선	$y^2=4px$, $x^2=4py$	⇨ 준선	$x=-p$, $y=-p$
타원	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	⇨ 준원	$x^2+y^2=a^2+b^2$
쌍곡선	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$)	⇨ 준원	$x^2+y^2=a^2-b^2$

[관련 문제] ① 직선 $x+y=5$ 위의 한 점 $P(a,\ b)$에서 포물선 $x^2=8y$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, $a-b$의 값을 구하여라.

② 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$ 에 그은 두 접선이 서로 수직으로 만날 때, 점 P 의 자취의 길이를 구하여라.

일반 풀이

① 점 $P(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-b=m(x-a)$ $\quad\therefore y=mx-am+b$

이를 $x^2=8y$에 대입하면 $x^2-8mx+8ma-8b=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16m^2-8am+8b=0$

이 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8b}{16}=-1$ $\quad\therefore b=-2$

이때 점 P는 직선 $x+y=5$위의 점이므로

$a+b=5$ $\quad\therefore a=7$ $\quad\therefore a-b=7-(-2)=9$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{9m^2-5}$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 를 지나므로

$b=ma\pm\sqrt{9m^2-5}$, $b-ma=\pm\sqrt{9m^2-5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a^2-9)m^2-2abm+b^2+5=0$

이 이차방정식의 두 근의 곱이 -1 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b^2+5}{a^2-9}=-1,\ b^2+5=9-a^2$ $\quad\therefore a^2+b^2=4$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 의 자취는 반지름의 길이가 2 인 원이므로 구하는 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

랑데뷰 풀이

① 두 접선이 서로 수직이므로 점 P는 포물선의 준선 $y=-2$ 위에 있다.

따라서 $b=-2$이고 $a+b=5$이므로

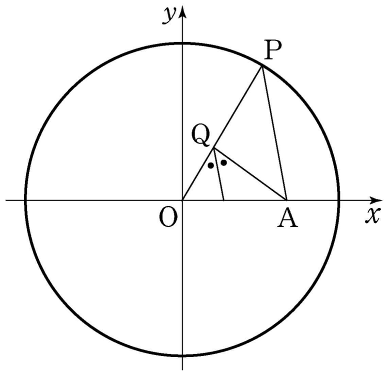
$a=7$ $\quad\therefore a-b=9$

② 두 접선이 수직이므로 점 P는 준원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 자취의 길이는 원주 4π이다.

대표문항 2

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $P(a,\ b)$와 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q전체의 집합을 X라 하자.
(단, $b \neq 0$)

> (가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다.
> (나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 ∠OQA를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은?

① $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

② $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

③ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

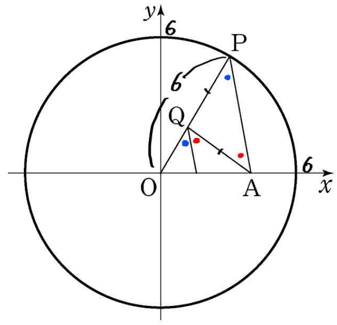
④ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

⑤ $X \subset \left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

[2009학년도 9월 모평 수리가형]

풀 이

$\overline{AP}//\overline{BQ}$이므로
$\angle AQB = \angle QAP$
(엇각)
$\angle OQB = \angle QPA$
(동위각)
따라서
$\angle QAP = \angle QPA$
이므로



삼각형 QAP는 $\overline{QA}=\overline{QP}$인
이등변삼각형이고, $\overline{OQ}+\overline{QA}=\overline{OQ}+\overline{QP}=\overline{OP}=6$
이므로 점 Q는 두 점 $O,\ A$에 이르는 거리의 합이 6으로 일정하다.
따라서 점 Q는 두 점 $O,\ A$를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이다.
x축 위에 초점이 있고 장축의 길이가 6이므로
$\dfrac{(x-m)^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$꼴의 타원이다.
두 초점의 중점이 $(2,\ 0)$이 타원의 중심이다. $m=2$
타원의 중심에서 초점까지 거리가 2이므로
$9-b^2=4$에서 $b^2=5$

점 Q의 자취는 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ (단, $y \neq 0$)

[다른 풀이]
점 Q의 좌표를 (x,y)라 하면
$\overline{OQ}+\overline{QA}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$
$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-8x+16+y^2=36-12\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$
$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+5$ 양변을 제곱하면
$9x^2+9y^2=4x^2+20x+25$, $5(x-2)^2+9y^2=45$

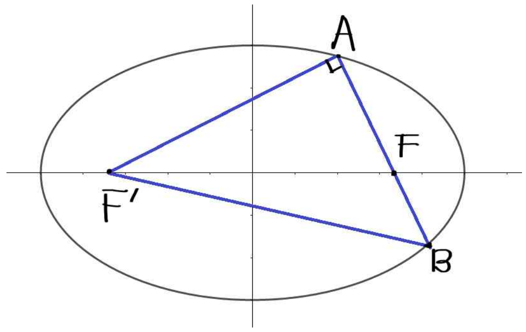
점 Q의 자취는 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ (단, $y \neq 0$)

이므로

$X \subset \left\{(x,y) \middle| \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

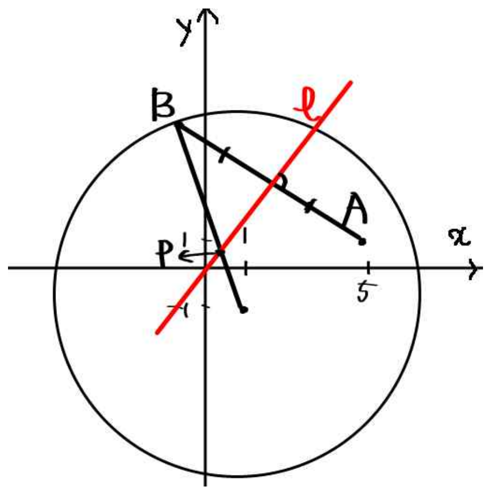
2.

그림과 같이 두 초점이 $F\left(\frac{13}{2},\ 0\right)$, $F'\left(-\frac{13}{2},\ 0\right)$인 타원 위의 제1사분면의 점 A에 대하여 $\angle FAF'=\frac{\pi}{2}$, $\sin(\angle AF'F)=\frac{5}{13}$이다. 직선 AF가 이 타원과 제4사분면에서 만나는 점을 점 B라 할 때, 삼각형 $AF'B$의 넓이를 구하여라.



3.

원 $C_1 : (x-1)^2+(y+1)^2=64$의 내부에 점 $A\,(5,\ 1)$가 있다. 원 위의 임의의 점 B에 대하여 선분 AB의 수직이등분선을 직선 l이라 하자. 원의 중심과 점 B를 잇는 선분이 직선 l과 만나는 교점을 점 P라 할 때 점 P가 그리는 도형의 넓이를 S라 할 때 $\frac{S^2}{\pi^2}$의 값을 구하여라. (단. 경계는 제외)



대표문항 5

좌표평면 위를 움직이는 두 점
$A(2+\sin\theta,\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\theta)$,
$B(\cos\theta,\ -\sqrt{3}\cos\theta)$와 점 $C(1,\ 0)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{CM}$이 최대일 때 점 M을 D, $\overline{CM}$이 최소일 때 점 M을 E라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

| 보 기 |

ㄱ. 점 M이 그리는 도형은 타원이다.

ㄴ. $\overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle DOE=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$이다.

(단, O는 원점이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2012학년도 사관학교 *B*형]

풀 이

$$(1,\ \sqrt{3})+\left(\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\right)$$

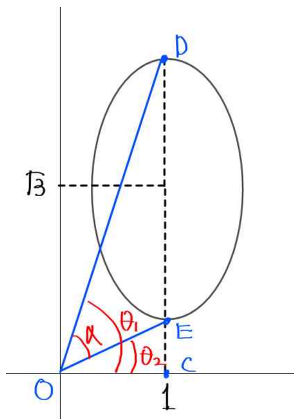
$X=\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$, $Y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)$라 하면

$$3X^2+Y^2=\frac{3}{4}(2\sin^2\theta+2\cos^2\theta)=\frac{3}{2}$$

즉, $\dfrac{X^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $(X,\ Y)$는 타원위에 존재한다.

ㄱ. 중점 M은 ㉠을 x축 방향으로 1만큼 y축 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행 이동시킨 것이므로
중점 M이 그리는 도형은 타원이다. (참)



ㄴ. ㄱ에서 점 $C(1,0)$은 장축의 연장선 위에 존재하므로 점 C와 D는 타원의 장축의 양 끝점이다.

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $\overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$\therefore\ \overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle DOC=\theta_1$, $\angle EOC=\theta_2$라 하면 $\overline{OC}=1$이므로

$$\tan\theta_1=\overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\tan\theta_2=\overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\alpha=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\left(3-\frac{3}{2}\right)}=\frac{2}{5}\sqrt{6}$$

따라서 ㄱ.ㄴ.ㄷ. 모두 옳다.

8.

좌표평면 위를 움직이는 두 점

$\mathrm{A}(2+2\sqrt{3}\cos\theta,\ 3-\cos\theta)$,

$\mathrm{B}(4+2\sin\theta,\ -1+\sqrt{3}\sin\theta)$와 점 $\mathrm{C}(0,\ 1)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{CM}}$이 최대일 때 점 M을 D, $\overline{\mathrm{CM}}$이 최소일 때 점 M을 E라 하자. 이때 $\angle\mathrm{DOE}=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=k$이다. $30k$의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이고 $0\leq\theta<2\pi$)

9.

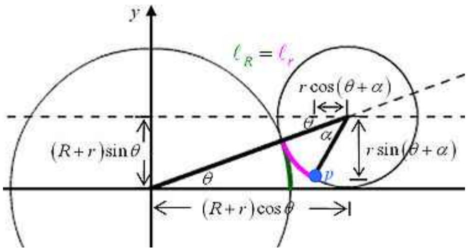
매개변수 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 나타낸 곡선

$x=-2\cos\theta,\ y=\sin\theta-\cos\theta+1$

위의 점 P에 대하여 $A(0,\ 1)$과 점 P에서의 접선 사이의 거리는 $\theta=\alpha$일 때 최소이다. $\tan\alpha$의 값을 구하여라.

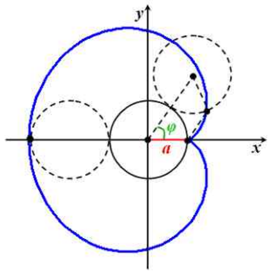
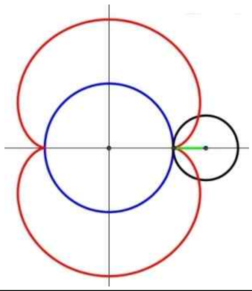
상위권 수학 랑데뷰 세미나(13)

에피 사이클로이드

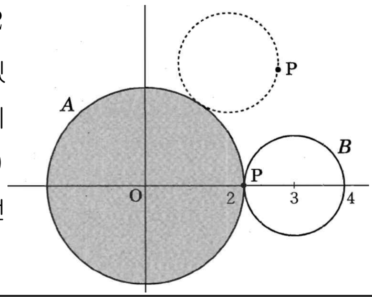


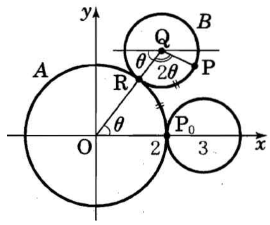
어떤 원 위의 한 점이 다른 원에 외접하며 굴러가며 그리는 곡선을 에피 사이클로이드(*Epicycloid*) 라고 한다.
오른쪽 그림에서 큰원의 반지름을 R, 작은원의 반지름을 r이라 하면 $l_R = l_r$이므로 $R\theta = r\alpha$를 만족하는 α에 대하여 다음이 성립한다. (단, 두 원이 외접하는 점에서 시작할 때)

$$x=(R+r)\cos\theta - r\cos(\theta+\alpha),\quad y=(R+r)\sin\theta - r\sin(\theta+\alpha)$$

관계	$R=r$	$R=2r$
이름	카디오이드(*cadioid*)(심장형곡선)	네프로이드(*nephroid*)(신장형곡선)
그래프 모양		
1회전할 때 곡선의 길이	$16R$	$12R$

[관련 문제] 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 A와 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 B가 있다. 점 $(2,\ 0)$에서 원 A에 접하고 있던 원 B가 원 A의 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 미끄러지지 않게 굴러갈 때, 두 원 A, B가 점 $(2,\ 0)$에서 다시 접할 때까지 점 $(2,\ 0)$에 있던 원 B위의 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라. ⇨ 네프로이드





풀이 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 0)$을 $\mathrm{P_0}$, 움직인 원 B의 중심을 Q, 두 원 A, B의 접점을 R라 하면 호 $\mathrm{P_0R}$의 길이와 호 PR의 길이는 서로 같다. 따라서 $\angle \mathrm{ROP_0}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{P_0R}}=2\theta=\overset{\frown}{\mathrm{RP}}$이고, $\overline{\mathrm{QR}}=1$이므로 $\angle \mathrm{PQR}=2\theta$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\cos(\pi+3\theta),\ \sin(\pi+3\theta))=(-\cos 3\theta,\ -\sin 3\theta)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(3\cos\theta-\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

$x=3\cos\theta-\cos 3\theta$, $y=3\sin\theta-\sin 3\theta$라 하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta-3\cos 3\theta$

$0\le\theta\le 2\pi$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{18(1-\cos 2\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}6|\sin\theta|d\theta=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=24$$ ⇦ 네프로이드 이므로 $12\times 2=24$

상위권 수학 왕쇄뷰 세미나(18)

정다각형의 무게중심에서 각 꼭짓점으로의 벡터들의 합은 $\vec{0}$이다.

증명1

정 n각형의 무게 중심을 O라 하고 각 꼭짓점을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$이라 하면

$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \cdots, \overrightarrow{OA_n}$ 이고 각 벡터가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{2\pi}{n}$이다.

이때, $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OX}$,

$\overrightarrow{OX}\neq\vec{0}$라 하면 $X\neq O$이다.

각각의 꼭짓점 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, X$을 시계방향으로 $\dfrac{2\pi}{n}$씩 회전시킨 점을 각각 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$, Y라 하면 $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\cdots+\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OY}$

이다. 그런데 $B_1=A_2, B_2=A_3, \cdots, B_{n-1}=A_n$,

$B_n=A_1$이므로

$$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\cdots+\overrightarrow{OB_n}$$
$$=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}$$

$\therefore \overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OX}$

그런데 $\dfrac{2\pi}{n}\neq 2\pi$ ($\because$ n은 3이상 자연수)

$Y\neq X$이므로 모순이다. 따라서 $\overrightarrow{OX}=\vec{0}$이다.

증명2

반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정 n각형의 무게 중심을 O라 하고 각 꼭짓점을 A_1, A_2, A_3, $\cdots, A_n$이라 하면 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \cdots, \overrightarrow{OA_n}$ 이고 각 벡터가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{2\pi}{n}$이다. 이 정 n각형의 무게중심을 원점, A_1을 $(r, 0)$으로 옮기면

$$\overrightarrow{OA_1}=r$$
$$\overrightarrow{OA_2}=r\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$
$$\overrightarrow{OA_3}=r\left\{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right\}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\overrightarrow{OA_n}=r\left\{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right\}$$

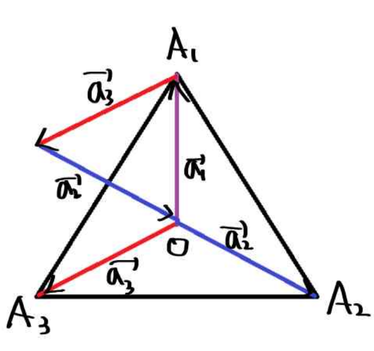
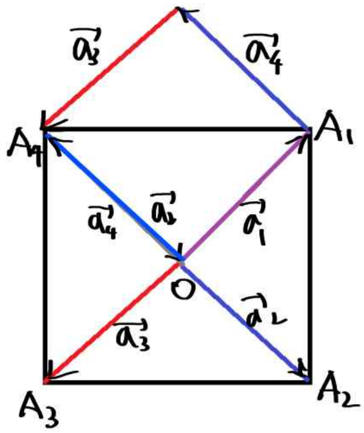
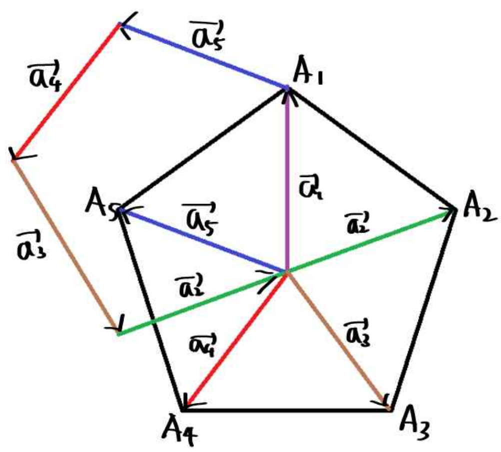
여기서 $x^n=r$ 이란 방정식을 생각해 보면

위 복소수들은 $x^n=r$ 방정식의 n개의 근이며

x^{n-1}의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 n개 근의 합은 0이 된다.

따라서 정다각형의 무게중심에서 각 꼭짓점으로의 벡터 합은 $\vec{0}$이다.

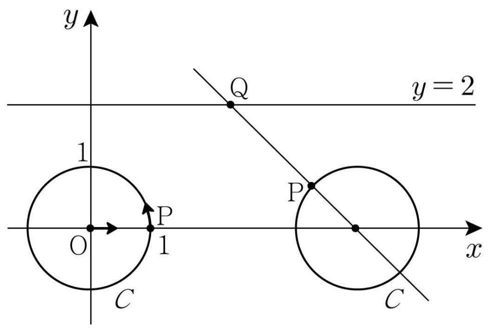
벡터의 꼬리 물기를 통한 그림 설명

① 정삼각형	② 정사각형	③ 정오각형
		

대표문항 15

좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P 는 원 C위를 시계 반대 방향으로 매초 1 의 속력으로 움직인다.
> (나) 원 C는 x 축의 양의 방향으로 매초 10 의 속력으로 움직인다.

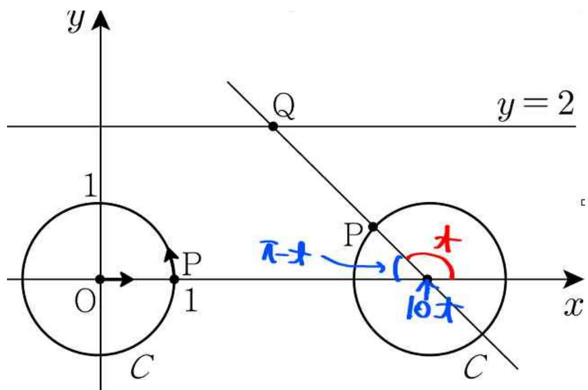


원 C는 중심이 원점에서, 점 P 는 점 $(1, 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P 를 지나는 직선이 직선 $y=2$ 와 만나는 점을 Q 라 하자. 출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$ 초가 되는 순간, 점 Q 는 직선 $y=2$ 위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a 의 값을 구하시오.

[2010학년도 10월 교육청]

풀 이

그림과 같이



t초 후의 원의 중심의 좌표는 $(10t, 0)$이므로 점 P의 좌표는

$P(10t-\cos(\pi-t), \sin(\pi-t))=$ P$(10t+\cos t, \sin t)$

이고,

원의 중심과 점 P의 이은 직선의 기울기는

$\frac{\sin t}{(10t+\cos t)-10t}=\tan t$이다.

따라서 직선의 방정식은 $y=\tan t(x-10t)$이므로 점 Q의 x 좌표는 $y=2$을 대입하면

$x=10t+2\cot t$

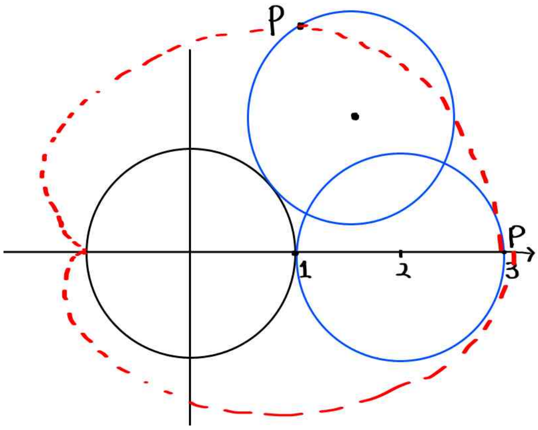
$\therefore \frac{dx}{dt}=10-2\mathrm{cosec}^2 t$

$\therefore \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=\frac{3}{4}\pi}=6$

40.

좌표평면에서 반지름의 길이가 1인 원 C가 원 $x^2+y^2=1$의 둘레를 접하면서 미끄러짐 없이 회전할 때, 원 C 위의 점 $P(x, y)$는 그림과 같은 심장 모양의 곡선을 그리게 된다. 이 때, 점 P의 좌표를 시각 t에 관한 함수로 나타낼 수 있다. 점 P의 y좌표가 최대일 때, 점 P의 속력을 $|\vec{v}|$라 하자. 이 때, $|\vec{v}|^2$의 값을 구하여라.

(단, 점 P는 속력 2로 움직이고 $(3, 0)$에서 출발한다.)



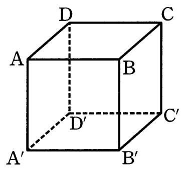
1.

상위권 수학 랑데뷰 세미나(22)

세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체의 대각선에 수직인 평면으로의 직육면체의 정사영 넓이$=\dfrac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

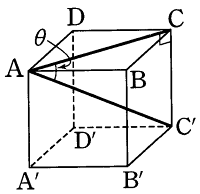
[관련 문제]

공중에 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD$-$A′B′C′D′이 있다. 직선 AC′에 평행한 빛에 의하여 이 빛과 수직인 평면에 정육면체의 그림자가 생겼다. 그림자의 넓이를 구하여라.



일반 풀이

사각형 ABCD, AA′B′B, AA′D′D의 그림자의 넓이의 합을 구하면 된다. 그림자가 생기는 면을 α라고 하자.



직선 AC′이 α에 수직이므로 $\angle$CAC′$=\theta$라고 하면 평면 ABCD와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $90^\circ-\theta$이다.

이때

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{CC'}}}{\overline{\mathrm{AC'}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 □ABCD의 그림자의 넓이는

$$\square\mathrm{ABCD}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

같은 방법으로 하면 사각형 AA′B′B, AA′D′D의 그림자의 넓이는 모두 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 구하는 그림자의 넓이는 $3\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

랑데뷰 풀이

위 공식의 $a=b=c=1$인 경우이므로

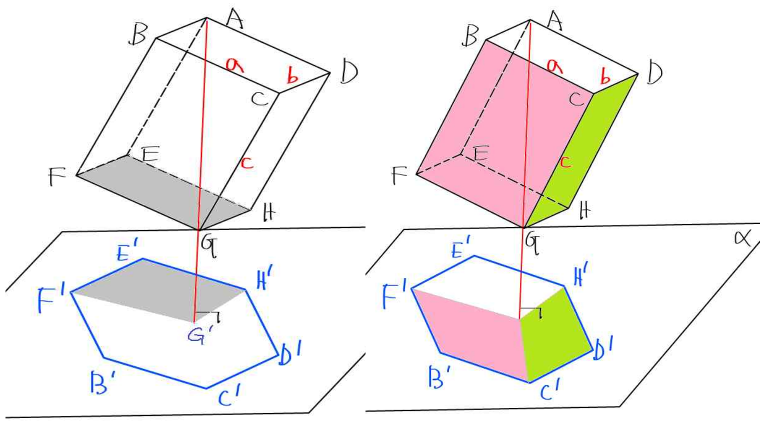
정사영의 넓이는 $\dfrac{3\times1\times1\times1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$

랑데뷰 설명

그림과 같이 모서리의 길이가 a,b,c인 직육면체 $ABCD-EFGH$를 대각선 $\overline{AG}$가 평면 α에 수직이 될 때 직육면체의 α위로의 정사영은 육각형 $E'F'B'C'D'H'$이다. (면 $EFGH \Rightarrow E'F'G'H'$, $BFGC \Rightarrow F'B'C'G'$, $CDHG \Rightarrow C'D'H'G'$가 된다.)

이때 두 평면의 이루는 각은 두 평면의 법선벡터가 이루는 각과 같으므로 평면 α와 직육면체의 $EFGH$가 이루는 각의 cos값은 α의 법선 벡터 $\overrightarrow{GA}$와 면 $EFGH$의 법선벡터 $\overrightarrow{GC}$의 코사인 값이므로

$$E'F'G'H'=EFGH\times\frac{\overline{GC}}{\overline{GA}}=ab\times\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



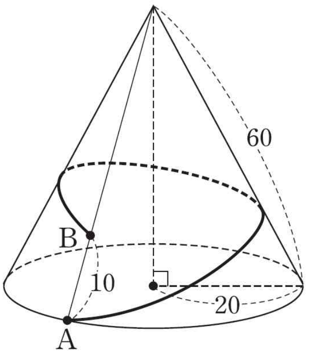
같은 방법으로, $F'B'C'G'=ac\times\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$C'D'H'G'=bc\times\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

따라서 육각형 $E'F'B'C'D'H'=\dfrac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

대표문항 1

오른쪽 그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B지점으로 가는 관광 열차의 궤도를 최단거리로 놓으면, 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이는?



① $\dfrac{200}{\sqrt{19}}$ ② $\dfrac{300}{\sqrt{30}}$ ③ $\dfrac{300}{\sqrt{91}}$

④ $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$ ⑤ $\dfrac{300}{\sqrt{91}}$

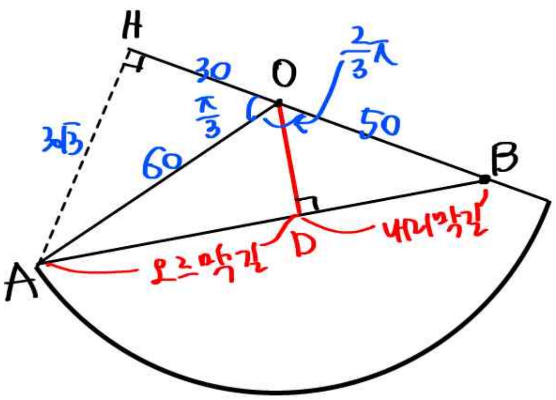
[1997학년도 수능]

풀 이

위의 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 옆면의 중심각을 θ라 하면 $l=r\theta$에서 $40\pi=60\theta$ $\therefore\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi$

A와 B의 최단 거리는 $\overline{AB}$이고 원뿔의 꼭짓점을 O라 할 때 $\overline{OA}=60$, $\overline{OB}=50$이다.

O에서 $\overline{AB}$에 가장 가까운 지점을 D라 하면 A에서 D까지는 오르막길, D에서 B까지는 내리막길이 된다.



A에서 $\overline{OB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle HOA=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{OA}=60$이므로

$\overline{OH}=30,\ \overline{AH}=30\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 AHB에서 $\overline{HB}=80$이므로

$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=(30\sqrt{3})^2+(80)^2=9100$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{9100}=10\sqrt{91}$

$\triangle AOB$의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times60\times50\times\sin120^\circ=750\sqrt{3}$

한편, $S=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\cdot10\sqrt{91}\cdot\overline{OD}=750\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{OD}=\dfrac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

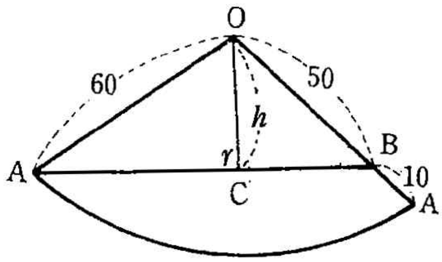
$\triangle OBD$에서

$\overline{BD}^2=\overline{BO}^2-\overline{OD}^2=50^2-\left(\dfrac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=\dfrac{400^2}{91}$

$\therefore\ \overline{BD}=\dfrac{400}{\sqrt{91}}$

[다른 풀이]

직원뿔을 펼치면 다음 그림과 같다.



$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{40\pi}{60}=\dfrac{2}{3}\pi$

코사인법칙에 의해서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=60^2+50^2-2\cdot60\cdot50\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi=9100$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{91}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot10\sqrt{91}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot60\cdot50\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi$

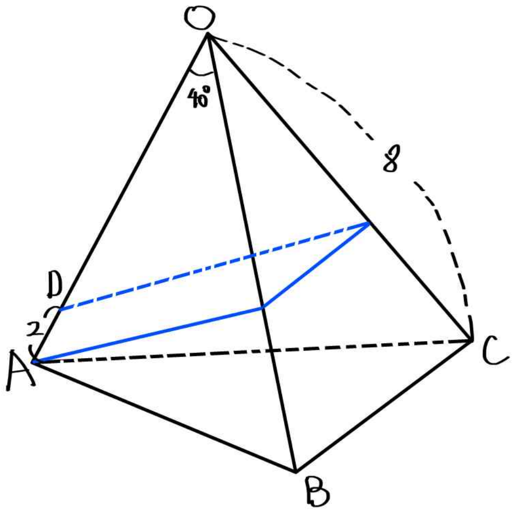
$\therefore\ h=\dfrac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

$\overline{\mathrm{CB}}^2=50^2-\left(\dfrac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=\dfrac{2500\times64}{91}$

따라서 내리막길의 길이$=\overline{\mathrm{CB}}=\dfrac{400}{\sqrt{91}}$

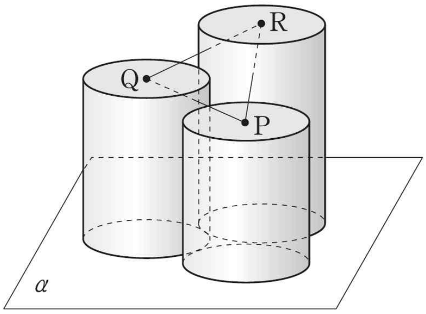
41.

다음 그림과 같이 삼각뿔 $O-ABC$가 있다. 삼각뿔의 밑면은 정삼각형이고 옆면은 모두 꼭지각이 40°인 이등변삼각형이다. 꼭짓점 A에서 면을 따라 한 바퀴 돌아 A에서 2만큼 떨어진 D지점으로 도착하는 최단 거리의 궤도를 그리려고 한다. 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 오르막길과 내리막길의 차를 k라 하면 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $k^2 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.



대표문항 5

그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R 라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$ 이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)



[2009학년도 수능]

풀 이

세 점 P, Q, R에서 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′라 하면 $\triangle$P′Q′R′는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

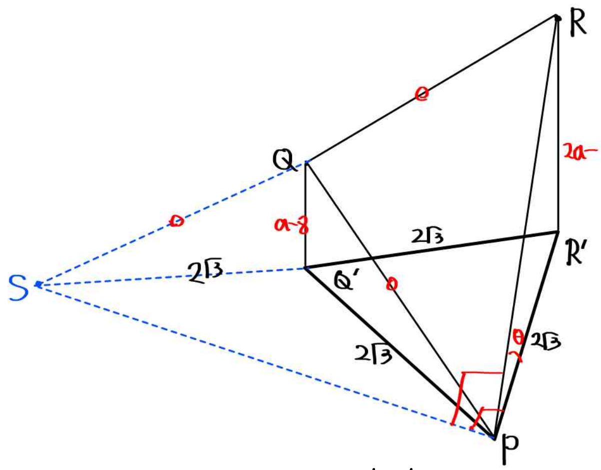
$\overline{PP'}=8$, $\overline{QQ'}=a$, $\overline{RR'}=b$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{12+(a-8)^2}$, $\overline{QR}=\sqrt{12+(b-a)^2}$,

$\overline{PR}$이 최대이므로 $\triangle PQR$이 이등변삼각형이 되려면 $\overline{PQ}=\overline{QR}$이다. $\therefore$ $\overline{PQ}=\overline{QR}$이고 $a-8=b-a$

따라서 $b=2a-8$

평면 α에 점 P가 포함되도록 평행 이동시키면 다음 그림과 같다.



선분 RQ의 연장선과 선분 $R'Q'$의 연장선이 만나는 점을 S라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{QS}$이므로 Q는 삼각형 PRS의 외심이고 삼각형 PRS는 외심이 변의 중점에 있으므로 $\angle RPS=90°$ 인 직각삼각형이다.

마찬가지로 $\overline{Q'R'}=\overline{Q'P}=\overline{Q'S}=2\sqrt{3}$ 이므로 점 Q'는 삼각형 $PR'S$의 외심이고 삼각형 $PR'S$는 외심이 변의 중점에 있으므로 $\angle R'PS=90°$ 인 직각삼각형이다.

따라서 두 삼각형의 교선이 $\overline{PS}$이고 두 평면에 각각 포함되고 교선에 수직인 선분이 $\overline{RP}$, $\overline{R'P}$이므로 두 삼각형이 이루는 각은 $\angle RPR'$이다.

따라서 $\angle RPR'=60°$ 아고 $\angle RR'P=90°$ 이므로

$\tan 60° = \dfrac{2a-16}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 이다. $\therefore$ $a=11$

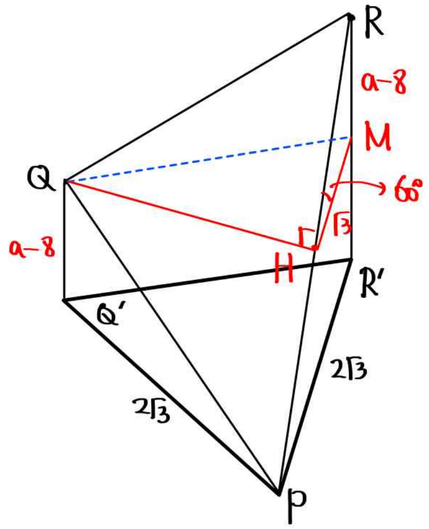
$b=2a-8$에서 $b=14$이다.

따라서 $a+b=25$

[다른 풀이]-1

$\overline{PQ}=\overline{QR}$이므로 삼각형 PQR은 이등변 삼각형이다.

따라서 꼭짓점 Q에서 $\overline{PR}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 H에서 $\overline{RR'}$에 $\overline{PR'}$와 평행선을 그어 만나는 점을 M이라 하면 $\triangle RQM \equiv \triangle QQ'P$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서

평면 QPR와 평면 α가 이루는 각은 $\angle RHM$이 된다.

$\overline{PR'}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{HM}=\sqrt{3}$이다.

따라서 $\tan 60^\circ=\dfrac{a-8}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

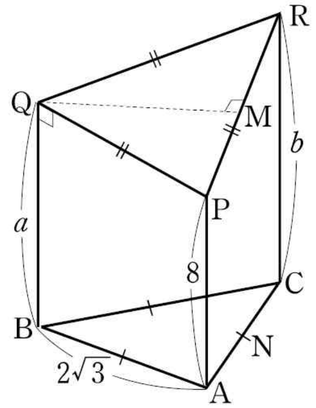
$\therefore\ a=11,\ b=14$이다.

따라서 $a+b=25$

[다른 풀이]-2

$\overline{PR}$이 최대이므로 $\triangle PQR$이 이등변삼각형이 되려면

$\overline{PQ}=\overline{QR}$



세 점 P, Q, R에서 α에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하면 $\triangle$ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.

$\overline{AP}=8,\ \overline{BQ}=a,\ \overline{CR}=b$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{12+(a-8)^2},\ \overline{QR}=\sqrt{12+(b-a)^2},$

$\overline{RP}=\sqrt{12+(b-8)^2}$이고

$(b-8)^2>(b-a)^2,\ (b-8)^2>(a-8)^2$이므로

$\overline{RP}>\overline{PQ},\ \overline{RP}>\overline{QR}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{QR}$이고 $a-8=b-a\ \cdots\cdots$ ㉠

$a=8+t,\ b=8+2t$라 하면 $(t>0)$

$\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+t^2},$

$\overline{PR}=\sqrt{12+4t^2}=2\sqrt{t^2+3}$이므로

$\overline{PR}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로

$\overline{QM}=\sqrt{12+t^2-(t^2+3)}=3$

$\therefore\ \triangle PQR=3\sqrt{t^2+3}$

$\triangle PQR\times\cos 60^\circ=\triangle ABC$에서

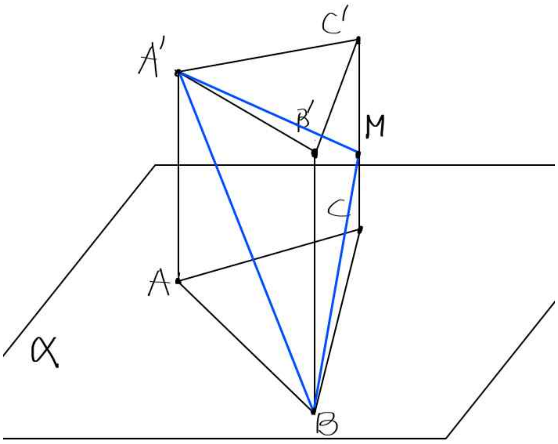
$\dfrac{3}{2}\sqrt{t^2+3}=3\sqrt{3}$

따라서 $a=11,\ b=14$이고 $a+b=25$

46.

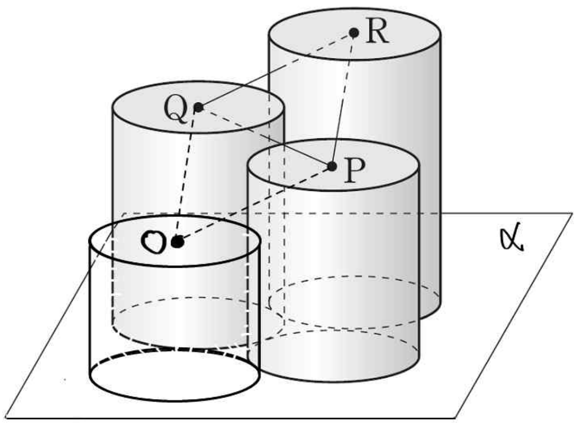
그림과 같이 평면 α위에 밑면이 정삼각형 ABC인 삼각기둥이 있다.

삼각기둥 $ABC-A'B'C'$의 높이 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$는 길이가 4이고 모두 평면 α에 수직이다. 선분 $C'C$의 중점을 M이라 할 때 삼각형 $A'MB$와 평면 α가 이루는 각을 θ라 하자. $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는 S이다. S^2을 구하여라.



47.

그림과 같이 반지름의 길이가 모두 2이고 높이가 서로 다른 네 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 네 원기둥의 밑면의 중심을 각각 O, P, Q, R라 할 때, 삼각형 OPQ와 삼각형 QPR는 합동인 이등변삼각형이고, 평면 OPQ와 평면 α가 이루는 각의 크기는 45°이다. 네 원기둥의 높이를 각각 4, a, b, c라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라. (단, $4<a<b<c$)

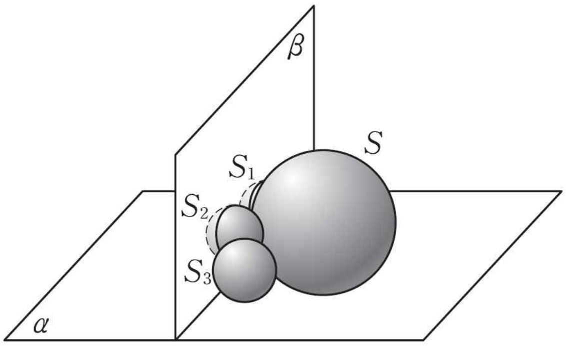


대표문항 9

그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

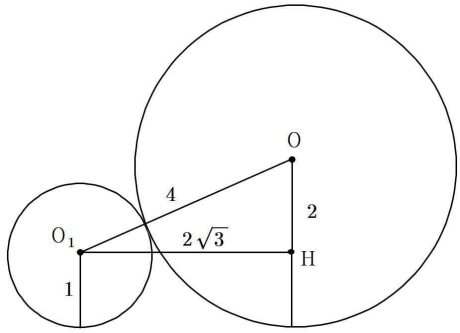
> (가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1이다.
> (나) S_1, S_2, S_3 은 모두 S에 접한다.
> (다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
[2014년 9월]



풀 이

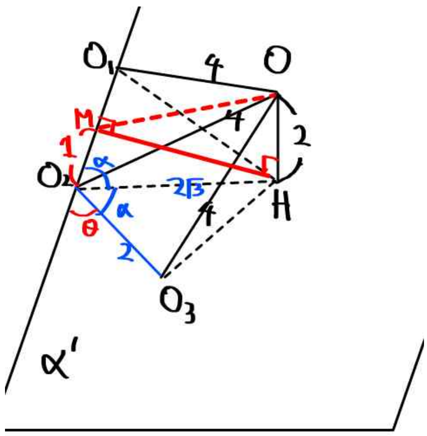
평면과 평면이 이루는 각을 단면화 시켜서 관찰하기 위하여 우선 도형을 옆에서 관찰하면 다음과 같다.



S의 중심을 O라 하면

$\overline{OO_1}=4$, $\overline{OH}=2$ 이고 $\therefore \overline{O_1H}=2\sqrt{3}$

위에서 이 도형의 이면각 θ를 표현하기 위해 평면 α를 네 점 O_1, O_2, O_3, H 를 포함하는 평면 α'가 되도록 평행이동 시키면 다음과 같다.



$\triangle HO_1O_2 \equiv \triangle HO_2O_3$에서

$\angle HO_2O_1 = \angle HO_2O_3 = \alpha$라 두면

단면 D와 평면 β가 이루는 각 θ는 $\theta=\pi-2\alpha$이다.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{O_2M}}{\overline{HO_2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

따라서

$$\cos\theta = -\cos 2\alpha = -2\cos^2\alpha + 1$$
$$= -2\times\frac{1}{12}+1 = \frac{5}{6}$$

도형 D의 단면의 넓이는 π이므로 정사영의 넓이는 $\pi\times\frac{5}{6}$이다. $\therefore p+q=11$

51.

그림과 같이 평면 α위에 있는 반구 S와

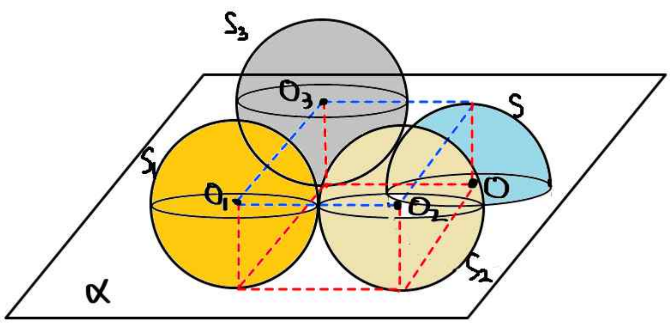
세 구 S_1, S_2, S_3가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 구의 반지름의 길이와 반구의 반지름의 길이는 모두 2이다. (나) 세 구는 모두 α에 접하고 반 구 S의 밑면은 α에 포함된다. (다) S_1은 S_2, S_3와 접하며 반 구 S는 S_2, S_3와 접하고 S_2, S_3의 중심사이 거리는 $4\sqrt{2}$이다.

S, S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O, O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 O, O_2, O_3을 지나는 평면을 β라 하자. 구 S_1의 평면 β위로의 정사영을 P, P의 α위로의 정사영의 넓이를 Q라 하자.

$P+Q=\left(p+q\sqrt{2}\right)\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.

(단, p와 q는 자연수이다.)

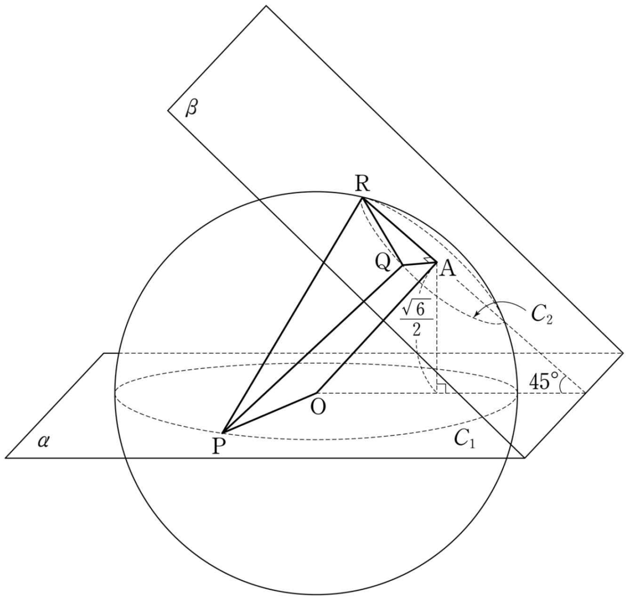


대표문항 13

반지름의 길이가 2 인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α 라 하고, 평면 α 와 이루는 각이 45° 인 평면을 β 라 하자. 평면 α 와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β 와 구가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심 A 와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

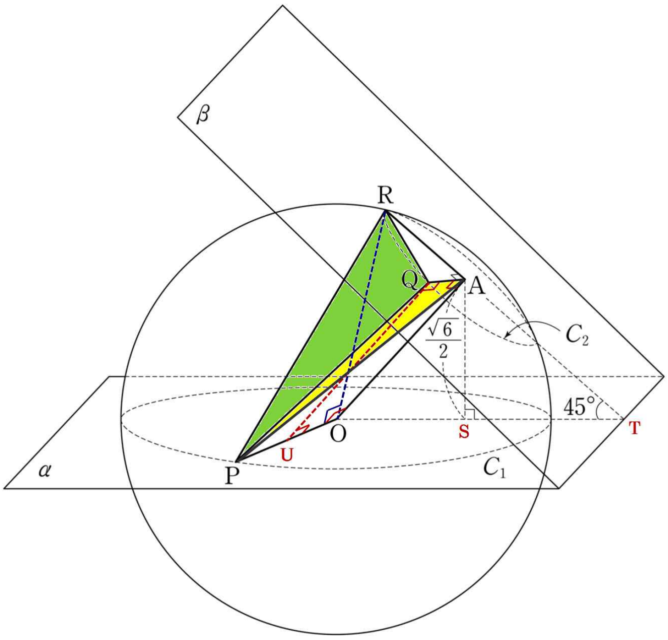
> (가) $\angle QAR = 90^{\circ}$
> (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행이다.

평면 PQR와 평면 $AQPO$가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



[2012년 5월]

풀이



$\triangle PQR$을 평면 $AQPO$에 정사영한 도형은

$\triangle PQA$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{\triangle PQA\text{의 넓이}}{\triangle PQR\text{의 넓이}}$

따라서 두 삼각형의 넓이를 구하자.

구의 중심 O에서 평면 β에 내린 수선의 발이 원의 중심 A이다.

따라서 $\overline{OA} \perp \beta$ 에서 $\angle OAT = 90^{\circ}$ 이고

$\triangle AOS$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AS} = \overline{OS} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 에서 $\overline{OA} = \sqrt{3}$

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{OA} = \sqrt{3}$, $\overline{OQ} = 2$이므로

$\overline{QA} = 1$

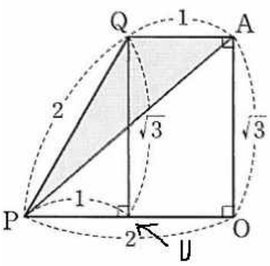
조건 (나)에서 $\overline{AQ} // \overline{OP}$이므로 점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 U라 하면

$\overline{QU} = \overline{AO} = \sqrt{3}$ 이므로 $\triangle PQA$는 밑변이 $\overline{AQ}$, 높이가 $\overline{QU}$인 삼각형이므로

$\triangle PQA = \dfrac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{QU} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdots ㉠$

한편 $\overline{AR}=\overline{AQ}=1$ ($\because$ 원의 반지름)이므로

직각이등변삼각형 ARQ 에서 $\overline{QR}=\sqrt{2}$



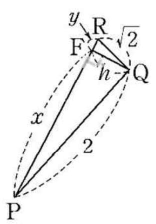
직각삼각형 PQU 에서 $\overline{PQ}=2$

$\overline{OP}\perp\triangle OAR$ 이므로 $\overline{OP}\perp\overline{OR}$

직각삼각형 OPR 에서 $\overline{PR}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle PQR$ 의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

[방법1]



삼각형 PQR의 점 Q에서 $\overline{PR}$에 내린 수선의 발을 F,

$\overline{PF}=x$, $\overline{PF}=y$, $\overline{QF}=h$라 하면

$\overline{PR}=x+y=2\sqrt{2}$

두 직각삼각형 QRF와 QFP의 공통변 QF에 의하여

$h^2=4-x^2=2-y^2$에서 $(x-y)(x+y)=2$

두 식을 연립하면 $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$, $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 이므로

$h=\sqrt{4-x^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore\ \triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{QF}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cdots$㉡

[방법2]

$\triangle PQR$ 에서 세변의 길이가 $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$ 이므로

헤론의 공식에서

둘레의 길이가 $3\sqrt{2}+2$이므로

$$\triangle PQR=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}+2}{2}\times\frac{\sqrt{2}+2}{2}\times\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\times\frac{-\sqrt{2}+2}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(18-4)(4-2)}=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdots㉡$$

[방법3]

$\angle PRQ=\gamma$ 라 하면 코사인법칙에서

$\cos\gamma=\dfrac{8+2-4}{8}=\dfrac{3}{4}$, $\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ $\triangle PQR$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cdots$㉡

따라서

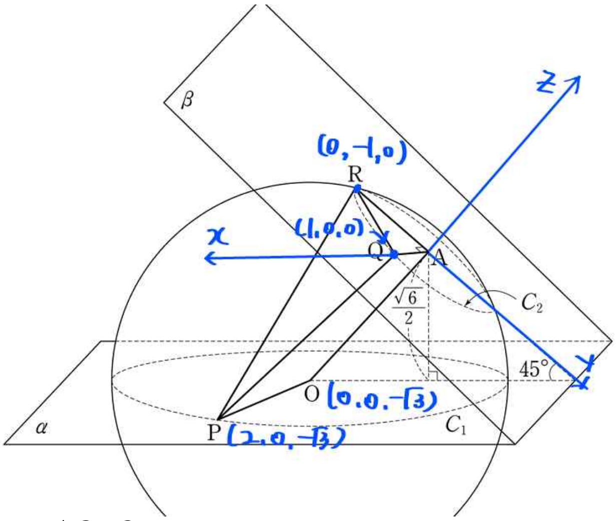
㉠, ㉡에서 $\cos\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{3}{7}\quad\therefore\ p+q=10$

[다른 풀이]

$\overline{AR} \perp \overline{AQ} \perp \overline{AO}$ 이고

$\overline{AR} = \overline{AQ} = 1$, $\overline{AO} = \sqrt{3}$, $\overline{OP} = 2$이므로 문제의 상황을 다음 그림과 같이 공간 좌표로 설정할 수 있다.



평면 $AQPO$는 xz평면의 일부이므로 법선벡터가 $\vec{a} = (0, 1, 0) \cdots$ ㉢이다.

평면 PQR는 세 점 $P(2, 0, -\sqrt{3})$, $Q(1, 0, 0)$, $R(0, -1, 0)$을 지나므로

평면 PQR의 법선벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

[방법1]

평면 PQR의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$이라 할 때

P, Q, R의 좌표를 대입하면

$2a - \sqrt{3}c + d = 0$, $a + d = 0$, $-b + d = 0$

에서 $a = -d, b = d, c = -\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ 이므로

평면 PQR의 법선벡터는 $\vec{b} =$

$\left(-1, 1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \cdots$ ㉣

[방법2]

$\overline{PQ}$의 연장선이 z축과 만나는 좌표 S를 구하자.

$\overline{AQ} : \overline{OP} = \overline{SA} : \overline{SO} = 1 : 2$이므로 $S(0, 0, \sqrt{3})$

따라서 평면 PQR의 각 절편이 $1, -1, \sqrt{3}$이므로

$\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{\sqrt{3}} = 1$ 에서 평면 PQR의 법선벡터는

$\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \cdots$ ㉣

[방법3]

$\overrightarrow{PR} = (-2, -1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, \sqrt{3})$ 에서

$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ (by 벡터의 외적) 이므로 평면 PQR의 법선벡터는

$\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1) \cdots$ ㉣

따라서

㉢, ㉣에서

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{7}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$\therefore \cos^2\theta = \dfrac{3}{7}$

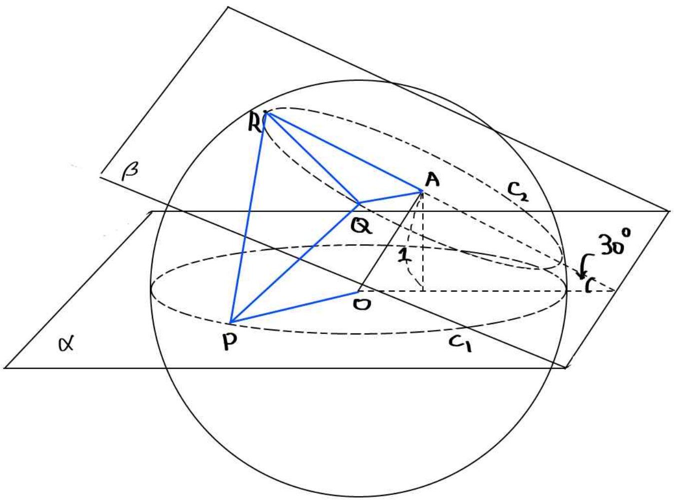
$\therefore p + q = 10$

56.

반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 30°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 1일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

> (가) $\angle QAR = 90^\circ$
> (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행이다.

평면 PQR와 평면 $AQPO$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하여라.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



상위권 수학 랑데뷰 세미나(27)

직선을 포함하는 평면의 방정식

직선의 방정식 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$을 연립방정식 형태의 두 식으로 분리하면 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}$, $\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$이고 두 식을 모두 만족하는 한 개의 일차방정식(k에 대한 항등식)으로 나타내면 그것이 직선을 포함하는 평면의 방정식이다.

즉, $(mx-ly-mx_1+ly_1)+k(ny-mz-ny_1+mz_1)=0$이다.

[관련 문제] 직선 $x=y-2=\dfrac{z+4}{3}$를 포함하고, 점 $(1,\ 0,\ -2)$ 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

일반 풀이	랑데뷰 풀이
법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$이고, 점 $(1,\ 0,\ -2)$를 지나는 평면의 방정식은 $a(x-1)+by+c(z+2)=0$ ……㉠ 직선 $x=y-2=\dfrac{z+4}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면 $x=t,\ y=t+2,\ z=3t-4$ ……㉡ 직선 ㉡은 평면 ㉠ 위에 있으므로 ㉡을 ㉠에 대입하면 $a(t-1)+b(t+2)+c(3t-2)=0$ $\therefore\ (a+b+3c)t-(a-2b+2c)=0$ 위의 식은 임의의 실수 t에 대하여 성립하므로 $a+b+3c=0, a-2b+2c=0$ $\therefore\ a=-\dfrac{8}{3}c,\ b=-\dfrac{1}{3}c$ ……㉢ ㉢을 ㉠에 대입하면 $-\dfrac{8}{3}c(x-1)-\dfrac{1}{3}cy+c(z+2)=0$ $8(x-1)+y-3(z+2)=0$ ($\because\ c\neq0$) $\therefore\ 8x+y-3z-14=0$	$x=y-2=\dfrac{z+4}{3}$의 식을 분리하면 $x-y+2=0,\ 3y-z-10=0$이므로 직선을 포함하는 평면의 방정식은 $k(x-y+2)+(3y-z-10)=0$ 이다. 이 식에 $(1,\ 0,\ -2)$을 대입하면 $3k-8=0\quad \therefore k=\dfrac{8}{3}$ 대입하고 정리하면 $\therefore\ 8x+y-3z-14=0$ **설명** $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$이 나타내는 직선은 두 방정식 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}$ ……①, $\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$……② 를 만족하는 점 $(x,\ y,\ z)$의 집합이라고 생각할 수 있다. 그런데 ①, ②를 각각 정리하면 $mx-ly-mx_1+ly_1=0$ ……①′ $ny-mz-ny_1+mz_1=0$ ……②′ 이므로 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$은 두 평면 ①′, ②′의 교선이라는 것을 알 수 있다. 따라서 직선을 포함하는 평면은 $(mx-ly-mx_1+ly_1)+k(ny-mz-ny_1+mz_1)=0$

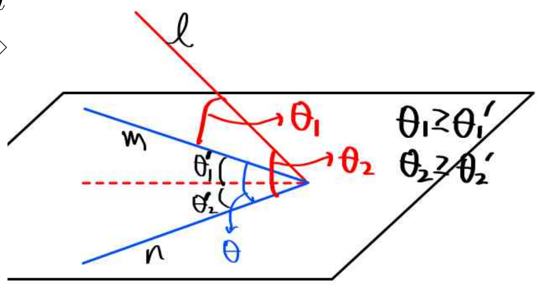
상위권 수학 랑데뷰 세미나(29)

수학영역 기하와벡터 고난이도 문제를 대하는 자세 (2)

⇨ ♥좌표 공간에서 두 직선이 이루는 각♥

(1) 직선 m과 n이 이루는 각의 크기가 θ이고 두 직선 m, n과 이루는 각의 크기가 각각 θ_1, θ_2인 직선 l이 있을 때 ⇨

$\theta_1+\theta_2 \geq \theta$ (등호는 세 직선이 한 평면 위에 있을 때)



(2) 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기가 θ일 때

① $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$이면 두 직선이 이루는 각의 크기는 θ

② $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$이면 두 직선이 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$

*다음 두 문제를 비교하여 보자.

㉠ $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 1,\ -2)$일 때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

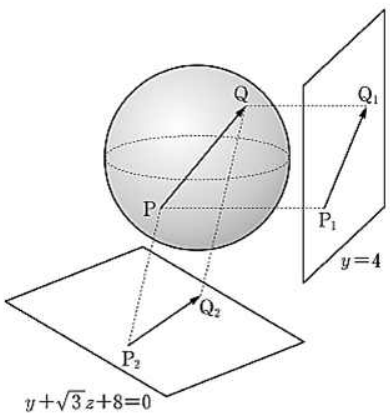
⇨ $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{1\times(-3)+2\times1+3\times(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore\ \theta=120°$

㉡ $l: x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$, $m: \dfrac{x}{-3}=y+2=\dfrac{z-1}{-2}$일 때 두 직선이 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

⇨ 두 직선의 방향 벡터가 $(1, 2, 3), (-3, 1, -2)$이므로 계산 과정은 (1)번과 같다.
그런데 두 직선이 이루는 각은 예각을 가리키므로 $180° - 120° = 60°$이다.

관련 문제1

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오.
[2014년 수능]



관련 문제2

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면

α: $x+y+2z=15$

β: $x-y-4\sqrt{3}z=25$

와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자.
원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}^2$의 최솟값을 구하시오.
[2009년 9월]

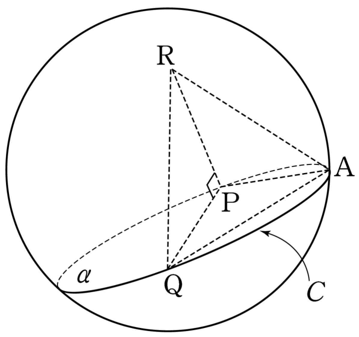
[2014년 수능] ⇨ $\overrightarrow{PQ}$의 방향벡터와 두 평면의 법선벡터 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, \sqrt{3})$가 이루는 각이 한 평면에서 결정될 때 문제의 최댓값이 나온다.

[2009년 9월] ⇨ α와 β의 법선 벡터와 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각이 한 평면에서 결정될 때 문제의 최솟값이 된다.

상세풀이 ⇨ 랑데뷰 상위권수학 기하와벡터 참고

대표문항 16

좌표공간에서 구 S : $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 α : $y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오. [2009년 수능]



풀 이

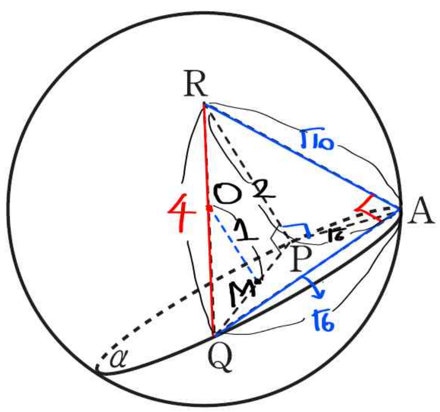
평면 PQR은 원 C의 지름 PQ를 지나고 평면 α에 수직이므로 구를 이등분한다.

그러므로 평면 PQR과 구의 교선은 구의 중심 O를 중심으로 하는 원이다.

그런데 $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$이므로 선분 QR은 구의 지름이다. 선분 OM의 길이는 점 O에서 평면 $y-\sqrt{3}z-2=0$까지의 거리이므로

$$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{|-2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$$

$$\overline{\mathrm{QM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$



$\triangle\mathrm{APQ}$는 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$

그리고 $\overline{\mathrm{RP}}=2\overline{\mathrm{OM}}=2$

직선 $\mathrm{RP}\perp\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{RP}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{RP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{QR}}^2$이므로 $\angle\mathrm{QAR}=90^\circ$

$\therefore\ s=\triangle\mathrm{AQR}$

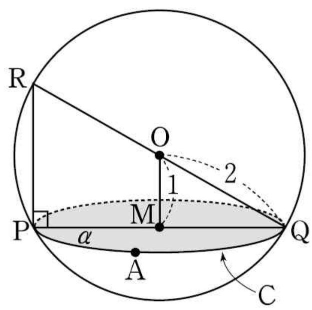
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}=\sqrt{15}$$

$\therefore\ s^2=15$

[다른 풀이]

구의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$에서 평면 α : $y-\sqrt{3}z=2$까지 의 거리는

$\dfrac{2}{\sqrt{1+3}}=1$이고



C의 중심을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{OM}}=1$

P, Q가 원 C의 지름의 양 끝점이므로

P, Q의 중점이 C의 중심 M이다.

따라서 원 C의 반지름 $\overline{\mathrm{MQ}}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{6}$

구의 중심 O가 선분 $\overline{\mathrm{RQ}}$ 위에 존재하므로

$\angle\mathrm{QAR}=90^\circ$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{RQ}}^2$이므로

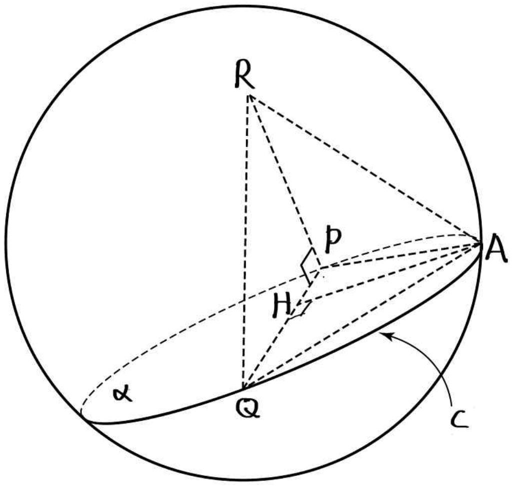
$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{4^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{6}=\sqrt{15}$

$\therefore\ S^2=15$

85.

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=9$와 평면 $\alpha : x+2y-2z-6=0$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $\mathrm{A}(0, 3, 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 점 A에서 지름 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하여라. (단, $\overline{\mathrm{AP}}<\overline{\mathrm{AQ}}$)

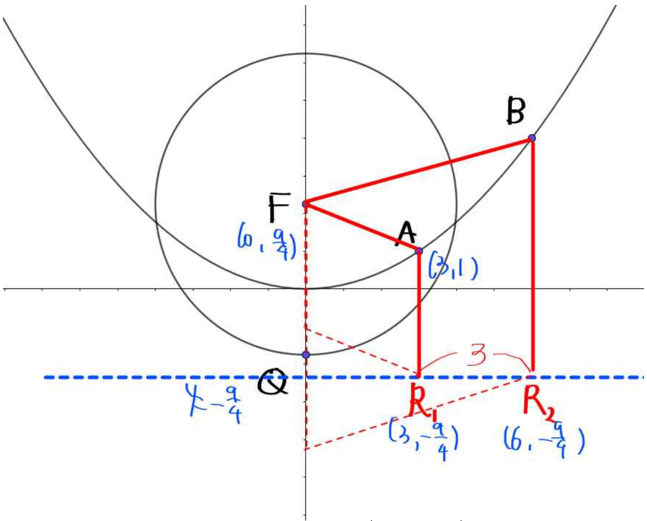


1) 정답 10

점 P가 점 A에 위치할 때 R을 R_1이라 하면

$\overline{FA}=\overline{AR_1}$에서 R_1은 다음 그림과 같이 준선

$y=-\dfrac{9}{4}$위에 있다.



점 A의 x좌표가 3이므로 $R_1\left(3,\,-\dfrac{9}{4}\right)$이다.

점 P가 B에 도착할 때의 R의 위치를 R_2라 하면

R_2도 준선 위의 점이고 $\overline{R_1R_2}=3$이므로

$R_2\left(6,\,-\dfrac{9}{4}\right)$이다.

따라서 점 B의 x좌표는 6이다.

$\therefore\ B(6,\,4)$

$\therefore\ a+6,\ b=4$

따라서 $a+b=10$

2) 정답 $\dfrac{510}{11}$

$\overline{FF'}=13$, $\sin(\angle AF'F)=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FF'}}=\dfrac{5}{13}$이므로

$\overline{AF}=5,\ \overline{AF'}=12$

타원의 정의에서

$\overline{AF'}+\overline{AF}=\overline{BF'}+\overline{BF}=17$

$\overline{BF}=a,\ \overline{BF'}=b$라 두면

$a+b=17\cdots$㉠

$12^2+(5+a)^2=b^2\cdots$㉡

㉠,㉡에서

$144+25+10a+a^2=289-34a+a^2$

$\therefore\ a=\dfrac{30}{11}$

$\triangle AF'B=\dfrac{1}{2}\times\overline{AF'}\times\overline{AF}$

$=\dfrac{1}{2}\times12\times\left(5+\dfrac{30}{11}\right)=\dfrac{510}{11}$

[다른 풀이]

$\triangle AF'B$의 넓이는 헤론의 공식에서

$S=\sqrt{17\times(17-12)\times(17-5-a)\times(17-b)}$

$=\sqrt{17\times5\times(12-a)\times a}$ $(\because$㉠$)$

$=\sqrt{17\times5\times\dfrac{102}{11}\times\dfrac{30}{11}}=\dfrac{510}{11}$

90) 정답 13

넓이가 4인 도형 f를 품는 평면을 F라 하고 평면 F와 평면 $2x-y+2z=1$이 이루는 이면각의 크기를 θ라 할 때 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이다.

한편, 평면 $2x-y+2z=1$와 평면 $x+y+z=1$이 이루는 이면각의 크기를 α라 하면

두 평면의 법선 벡터가 각각 $(2,-1,2)$, $(1,1,1)$이므로

$$\cos\alpha=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 평면 F와 평면 $x+y+z=1$이 이루는 이면각의 크기는 $\theta-\alpha$ 또는 $\theta+\alpha$이다.

정사영의 넓이는 이면각의 크기가 클수록 작아지므로 $\theta+\alpha$일 때 최소가 된다.

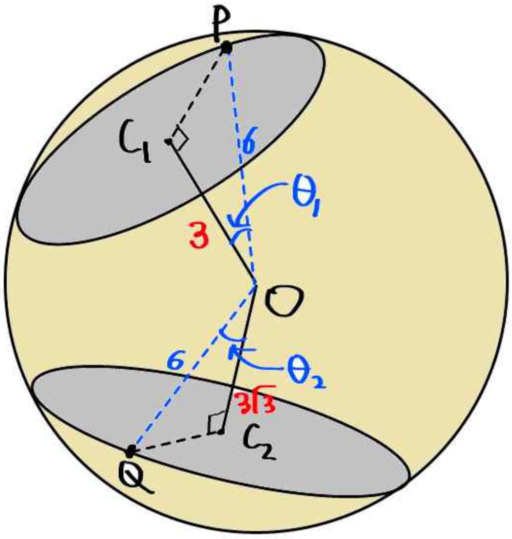
한편 $\cos\theta<\cos\alpha<\cos\frac{\pi}{3}$이므로 $\theta>\alpha>\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{\pi}{2}<\theta+\alpha<\pi$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\text{최솟값}&=4\times\cos\{\pi-(\theta+\alpha)\}\\&=-4\times\{\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha\}\\&=-4\times\left\{\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}\\&=\sqrt{10}-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=3$이므로 $a+b=13$

91) 정답 96



구의 중심 O에서 원 C_1위의 점 P에 그은 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 평면 α의 법선 벡터가 이루는 각을 θ_1라 할 때 $|\overrightarrow{OP}|=6$, $|\overrightarrow{OC_1}|=\frac{|-9|}{\sqrt{9}}=3$이므로

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta_1=\frac{\pi}{3}$$

구의 중심 O에서 원 C_2위의 점 Q에 그은 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각을 θ_2라 할 때 $|\overrightarrow{OP}|=6$, $|\overrightarrow{OC_2}|=\frac{|-9|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$이므로

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{OC_2}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta_2=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$$

평면 α의 법선 벡터 $(2,1,-2)$와 평면 β의 법선 벡터 $(-1,1,1)$이 이루는 각을 θ라 할 때

$\cos\theta=\frac{-2+1-2}{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 θ는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 또는 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이다.